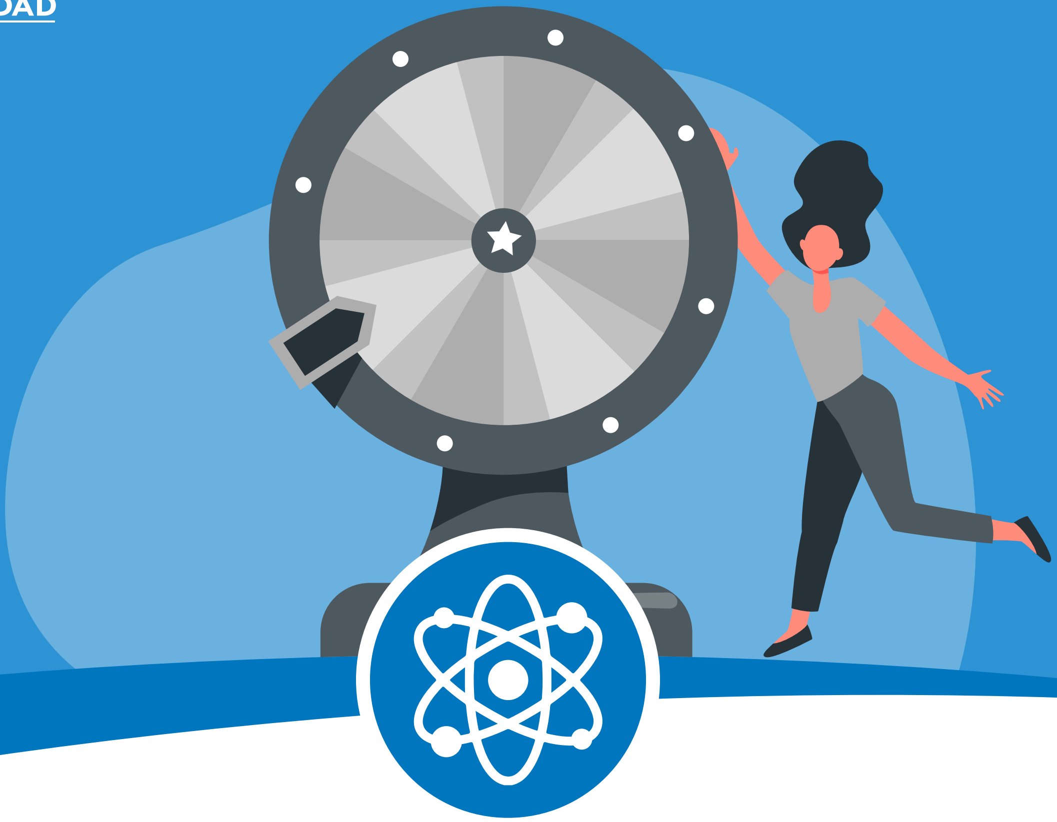


Movimiento Rotacional

Física

Vicerrectoría de Pregrado | CIVE Dirección de Ciclo de Vida Estudiantil | CIMA Unidad de Acompañamiento Estudiantil | PACE Programa de Acceso a la Educación Superior, Ministerio de Educación

RUTA DE APRENDIZAJE

• Con este documento se espera reforzar el concepto de dinámica de rotación.

• Este tema está inserto en la unidad de dinámica y en el siguiente esquema es posible ver la progresión de esa unidad, donde el tema de dinámica de rotación está marcado con un color diferente.

Movimiento circular → Movimiento relativo → Fuerzas y leyes del movimiento → Ley de Hooke → **Dinámica de rotación**

TEMAS

• Torque.

• Dinámica rotacional.

• Teorema de los ejes paralelos.

• Energía cinética rotacional.

• Rodamiento sin deslizamiento.

INTRODUCCIÓN

Al hacer rodar una rueda por un plano horizontal o soltar un barril desde un plano inclinado, se está realizando un movimiento de rodadura o rodamiento, que dependerá de diversos factores como el ángulo, el roce, masa, forma del cuerpo, entre otras.
En este documento se estudiarán los temas relacionados al movimiento rotacional.

Torque

Supongamos que intentas abrir una puerta y aplicas una fuerza de magnitud F, perpendicular a la superficie de la puerta cerca de las bisagras y luego a diferentes distancias desde las bisagras. Lograrás una relación de rotación más rápida para la puerta al aplicar la fuerza cerca de la perilla que al aplicarla cerca de las bisagras.

Cuando se ejerce una fuerza en un objeto rígido que se articula en torno a un eje, el objeto tiende a dar vuelta en torno a dicho eje. **La tendencia de una fuerza a dar vuelta un objeto en torno a cierto eje se mide mediante una cantidad llamada torque o momento de torsión $\vec{\tau}$**. La magnitud del momento de torsión o torque se define mediante la expresión (Serway & Yewett, 2009):

$$\tau = F \cdot r \cdot sen\alpha$$

siendo,

τ: torque [N · m]

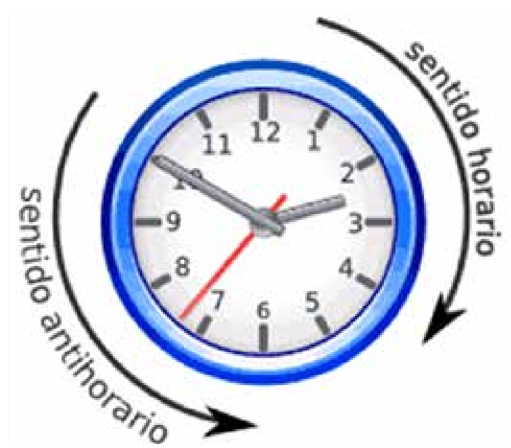
F: fuerza aplicada [N]

r: distancia al punto de giro [m]

α: ángulo de aplicación de la fuerza

Si el ángulo es de 90°, el torque es máximo y si el ángulo es de 0°, no existe torque.

Se utiliza la convención de que el torque será positivo si el cuerpo gira en sentido antihorario y el torque será negativo si gira en sentido horario.



Fuente: www.goconqr.com

Dinámica rotacional

En el documento de movimiento circular, se presentó la ecuación de aceleración tangencial que es:

$$a_{tan} = \frac{v_f - v_0}{t}$$

y se puede expresar como:

$$a_{tan} = \frac{\Delta v}{t}$$

Además, la velocidad tangencial es $v = \omega r,$ entonces:

$$a_{tan} = \frac{\Delta \omega r}{t}$$

Sabiendo que la aceleración angular es $\alpha = \frac{\Delta\omega}{t},$ se puede reescribir la ecuación anterior de la siguiente manera:

$$a_{tan} = \alpha r$$

Ahora retomemos la ecuación de torque:

$$\tau = Fr$$

Según la segunda ley de Newton $F = ma,$

$$\tau = m \cdot a \cdot r$$

Si la $a_{tan} = \alpha R,$ el torque se puede escribir como:

$$\tau = m \cdot \alpha \cdot r \cdot r$$
$$\tau = m \cdot \alpha \cdot r^2$$
$$\tau = m \cdot r^2 \cdot \alpha$$

La expresión $m \cdot r^2$ se llama inercia ($I = \sum m \cdot r^2$), entonces el torque también se puede expresar como:

$$\boldsymbol{\tau = I\alpha}$$

Teorema de los ejes paralelos

El teorema de los ejes paralelos **relaciona el momento de inercia I de un objeto de masa total M con respecto a cualquier eje, con su momento de inercia I_{Cm} con respecto a un eje que pasa por el centro de masa (CM) y es paralelo al primer eje.** Si ambos ejes están a una distancia h, entonces

$$I = I_{cm} + Mh^2$$

Así, por ejemplo, si se conoce el momento de inercia con respecto a un eje que pase por el CM, podemos calcular fácilmente el momento de inercia respecto de cualquier otro eje que sea paralelo al eje que pasa por el centro de masa (eje centroidal).

Energía cinética rotacional

La energía cinética rotacional **la posee un objeto que gira con respecto a un eje.** Por analogía con la energía cinética traslacional, esperaríamos que ésta estuviera dada por la expresión $\frac{1}{2}I\omega^2$ donde I es el momento de inercia del objeto y ω es su velocidad angular. Entonces, la energía cinética rotacional (K) respecto a un eje fijo es:

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2$$

Si el eje no está fijo en el espacio, la energía cinética rotacional toma una forma más complicada.

Energía cinética total

Un objeto en rodamiento experimenta **movimiento traslacional y movimiento rotacional.** La energía cinética total de un objeto rodante es,

$$K_{tot} = \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{cm}^2$$

donde,

$\boldsymbol{v}_{Cm}$: velocidad lineal del centro de masa [m/s]

$\boldsymbol{I}_{Cm}$: momento de inercia con respecto a un eje perpendicular que pasa por el CM [kg·m²]

ω: velocidad angular [rad/s]

M: masa [kg]

Rodamiento sin deslizamiento

El rodamiento de una bola o una rueda es un movimiento común en la vida diaria: una pelota que rueda por el piso, o las ruedas y los neumáticos de un automóvil o una bicicleta que ruedan sobre el pavimento. **El rodamiento sin deslizamiento depende de la fricción estática entre el objeto rodante y el suelo. La fricción es estática porque el punto de contacto del objeto rodante con el suelo está en reposo en cada momento. A este movimiento se le conoce también como rodamiento puro.**

El rodamiento sin deslizamiento **implica tanto rotación como traslación.** Se tiene entonces, una relación simple entre la rapidez lineal v del eje y la velocidad angular ω del neumático o esfera rodantes, dada por $\boldsymbol{v=R\omega}$, donde R es el radio. Esto es válido sólo si no hay deslizamiento.

Lee y analiza los siguientes problemas

Problemas resueltos

A continuación, se presentan tres problemas resueltos con sus procedimientos, en estos problemas se sugiere hacer lo siguiente:

- Lee comprensivamente.
- Revisa el paso a paso.
- Destaca lo que te resulte importante.
- Destaca lo que te genere dudas y luego consulta al tutor.

Problema n°1

Se tiene una esfera de radio R que se mueve con una rapidez v y gira en torno a un eje que pasa por su centro de masa con una rapidez angular ω. Calcular su energía rotacional y energía cinética de traslación. Considere la esfera como uniforme.

Solución

Paso 1: identificar los datos.

Radio= R

Rapidez= v

Rapidez angular= ω

Paso 2: calcular la energía cinética rotacional (K_R), recordando que la inercia de una esfera es $I = \frac{2}{5}MR^2$.

$$K_R = \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$K_R = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}MR^2\omega^2$$

$$K_R = \frac{1}{5}MR^2\omega^2$$

Paso 3: calcular la energía cinética traslacional, recordando que $v = \omega R$.

$$K_T = \frac{1}{2}Mv^2$$
$$K_T = \frac{1}{2}M(\omega R)^2$$
$$K_T = \frac{1}{2}M\omega^2 R^2$$
$$K_T = \frac{1}{2}MR^2\omega^2$$

Problema n°2 (Adaptado de Giancoli, 2008, pp. 270)

Se tiene una esfera de radio R y masa M (distribución uniforme) que rueda sin deslizar hacia abajo de un plano inclinado de pendiente θ. Calcular la aceleración de su centro de masa y la fuerza de roce.

Solución

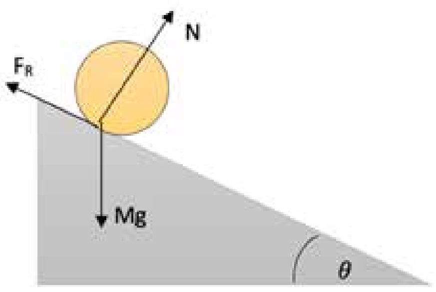
Paso 1: identificar los datos.

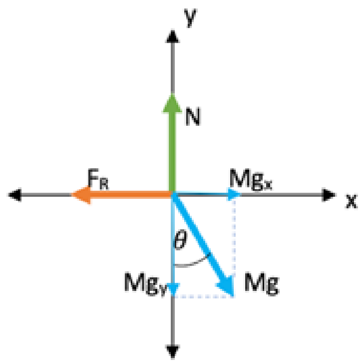
Radio= R

Masa= M

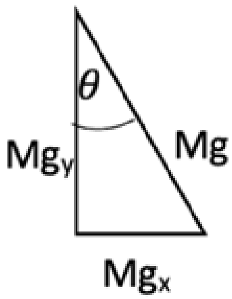
Ángulo= θ

Paso 2: realizar un esquema y diagrama de cuerpo libre.





Paso 3: descomponer el peso, utilizando razones trigonométricas.



Razones trigonométricas

$sen\theta$	$cos\theta$
$\frac{Cateto\ opuesto}{Hipotenusa}$	$\frac{Cateto\ adyacente}{Hipotenusa}$

$$Mg_x = Mgsen\theta$$
$$Mg_y = Mgcos\theta$$

Paso 4: realizar sumatoria de fuerzas de los ejes, debido a la traslación del cuerpo.

$\sum F_x = Ma_{cm}$ $Mg_x - F_R = Ma_{cm}$ $Mgsen\theta - F_R = Ma_{cm}$ $a_{cm} = \frac{Mgsen\theta - F_R}{M}$ $a_{cm} = gsen\theta - \frac{F_R}{M}$ (1)	$\sum F_y = 0$ $N - Mg_y = 0$ $N = Mg_y$ $N = Mgcos\theta$

Paso 5: realizar sumatoria de torque, debido a la rotación del objeto.

$$\sum \tau = I\alpha$$

Recordar que torque será $\tau = FR$ y el momento de inercia de una esfera es $I = \frac{2}{5}MR^2$.

$$F_R R = \frac{2}{5}MR^2\alpha$$

La aceleración angular es $\alpha = \frac{a_{cm}}{R}$, entonces

$$F_R\cancel{R} = \frac{2}{5}M\cancel{R^2}\frac{a_{cm}}{\cancel{R}}$$

$$F_R = \frac{2}{5}Ma_{cm} \qquad (2)$$

Paso 6: reemplazar la ecuación (2) en la ecuación (1) y así calcular la aceleración del centro de masa.

$$a_{cm} = gsen\theta - \frac{\frac{2}{5}\cancel{M}a_{cm}}{\cancel{M}}$$

$$a_{cm} = gsen\theta - \frac{2}{5}a_{cm}$$

$$a_{cm} + \frac{2}{5}a_{cm} = gsen\theta$$

$$\frac{7}{5}a_{cm} = gsen\theta$$

$$a_{cm} = \frac{5}{7}gsen\theta \qquad (3)$$

Paso 7: reemplazar la ecuación (3) en la ecuación (2) y así calcular la fuerza de roce.

$$F_R = \frac{2}{\cancel{5}}M\frac{\cancel{5}}{7}gsen\theta$$

$$F_R = \frac{2}{7}Mgsen\theta$$

Problema 3 (Adaptado de Giancoli, 2008, pp. 147)

Un satélite artificial se dice que es geoestacionario si está siempre en la vertical de un cierto punto de la tierra. ¿A qué altura están los satélites geoestacionarios?
Datos
Periodo de la Tierra: 24 horas
Radio de la Tierra: 6370 km
Aceleración de gravedad en la Tierra: g=9,8 m/s²

Solución

Paso 1: identificar los datos.

$T=24\ h=24\cdot 3600\ s$
$R_T=6370\ km=6370\cdot 1000\ m$

Paso 2: aplicar la segunda ley de Newton para el cuerpo.

$$\sum F = ma_c$$

$$F_g = ma_c$$

Hay que recordar que la fuerza gravitacional es $F_g = \frac{GM_T M_S}{r^2}$ y la aceleración centrípeta es $a_c = \frac{v^2}{R}$.

$$G\frac{M_T \cancel{M_S}}{R^{\cancel{2}}} = \cancel{M_s}\frac{v^2}{\cancel{R}}$$

Simplificando la masa del satélite y el radio, queda:

$$G\frac{M_T}{R} = v^2$$

Ahora es necesario utilizar la ecuación de la rapidez lineal en términos del periodo (que es el dato que se tiene), es decir, $v = \frac{2\pi R}{T}$.

$$G\frac{M_T}{R} = (\frac{2\pi R}{T})^2$$

$$G\frac{M_T}{R} = \frac{4\pi^2 R^2}{T^2}$$

$$GM_T = \frac{4\pi^2 R^2 R}{T^2}$$

$$GM_T = \frac{4\pi^2 R^3}{T^2}$$

Despejar el radio.

$$R^3 = \frac{GM_T T^2}{4\pi^2}$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}} \qquad (1)$$

Paso 3: como no se tiene el valor de G (constante universal de gravitación) ni la masa de la Tierra (M_T), se calcula el valor de GM_T, recordando la relación entre la fuerza gravitacional y el peso (el peso es la magnitud de la fuerza gravitacional).

$$F_g = P$$

$$G\frac{M_T \cancel{M_s}}{R_T^2} = \cancel{M_s} g$$

$$G\frac{M_T}{R_T^2} = g$$

$$GM_T = gR_T^2 \qquad (2)$$

Paso 4: reemplazar la ecuación (2) en la ecuación (1).

$$R = \sqrt[3]{\frac{gR_T^2T^2}{4\pi^2}}$$

Reemplazar los datos.

$$R = \sqrt[3]{\frac{9{,}8 \cdot (6370 \cdot 1000)^2(24 \cdot 3600)^2}{4\pi^2}}$$

$$R = 42207623\ m$$

$$R = 42208\ km\ (desde\ el\ centro\ de\ la\ Tierra)$$

Paso 5: calcular la altura a la que se encuentran los satélites geoestacionarios, para esto de debe restar el radio terrestre al radio obtenido.

$$h = R - R_T$$
$$h = 42208\ km - 6370\ km$$
$$h = 35\,838\ km$$

Pon a prueba tus conocimientos

Problemas propuestos

A continuación, se presentan tres problemas propuestos para que puedas resolver y practicar, recuerda hacer lo siguiente:

- Resuélvelos siguiendo los pasos utilizados en los problemas resueltos.
- Si es necesario apóyate con los apuntes.
- Si surgen dudas, registrarlas para luego consultar con el tutor.
- ¡Buen trabajo!

Para todos los problemas, considere g=9,8 m/s²

1. Un disco de esmeril de radio 0,6 m y 90 kg de masa gira a 460 rpm. ¿Qué fuerza de fricción, aplicada en forma tangencial al borde, hará que el disco se detenga en 20 s? (Dato inercia del disco $I = \frac{1}{2}MR^2$)

2. Una rueda de 60 cm de radio tiene un momento de inercia de 5 kg·m². Se aplica una fuerza constante de 60 N tangente al borde de la misma. Suponiendo que parte del reposo, ¿qué trabajo realiza en 4 s y qué potencia desarrolla?
Recordar la relación entre trabajo y energía $W = \Delta Ec_R$ y potencia es $P = \frac{W}{t}$.

3. Un aro y un disco circular tiene cada uno una masa de 2 kg y un radio de 10 cm. Se dejan caer rodando desde el reposo a una altura de 20 m a la parte inferior de un plano inclinado. ¿Cuál es el valor de sus rapideces finales? (Utilice conservación de energía mecánica visto en documentos anteriores)

Dato
Inercia del aro $I = MR^2$
Inercia del disco $I = \frac{1}{2}MR^2$

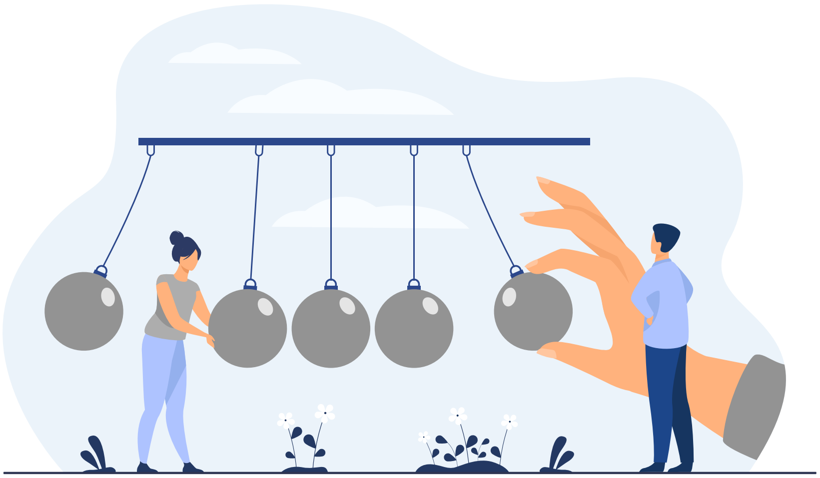
Solucionario

1. -65 N
2. 2070 J y 518 w
3. 14 m/s y 16,2 m/s

Síntesis

En este documento se presentaron los contenidos de torque, dinámica rotacional, energía cinética, teorema de ejes paralelos y rodamiento sin deslizarse.
Las principales ecuaciones trabajadas son:

Torque	$\tau = Frsen\theta$ $\tau = I\alpha$
Dinámica rotacional	$a_{cm} = \alpha R$
Teorema de ejes paralelos	$I = I_{cm} + Mh^2$
Energía cinética rotacional	$K = \frac{1}{2} I\omega^2$
Energía cinética total	$K_{tot} = \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2} M v_{cm}^2$



REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

- Giancoli, D. (2008). Física para ciencias e ingeniería. Cuarta edición. México: Pearson Educación.

¿Quieres recibir orientación para optimizar tu estudio en la universidad?

CONTAMOS CON PROFESIONALES EXPERTOS EN
EL APRENDIZAJE QUE TE PUEDEN ORIENTAR

SOLICITA NUESTRO APOYO

Sitio Web de CIMA

Ver más fichas

Solicita más información

TALCA UNIVERSIDAD CHILE
CIMA UNIDAD DE ACOMPAÑAMIENTO ESTUDIANTIL