

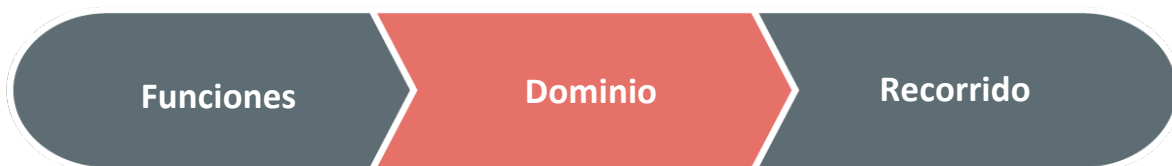


Dominio de Función

MATEMÁTICAS

RUTA DE APRENDIZAJE

- En este documento se espera reforzar el concepto de función, poniendo énfasis en cómo determinar el dominio de estas.



ÍNDICE

- Introducción
- Qué es una función
- Dominio de una función
- Ejercicios resueltos
- Ejercicios propuestos
- Síntesis

INTRODUCCIÓN

El estudio de las **funciones es clave** para la matemática, en particular para el cálculo, su importancia radica en que a través de ellas **podemos modelar la realidad**. Por ejemplo, si un escalador deja caer una piedra desde un alto risco, sabemos que la piedra caerá. Pero esta descripción general no nos ayuda a saber cuándo llegará la piedra al suelo. Para averiguarlo, necesitamos una **regla** que relacione la distancia d que cae la piedra y el tiempo que haya estado en caída. Galileo fue el primero en descubrir la regla: en t segundos la piedra cae $16t^2$ pies (Stewart et al., 2012).

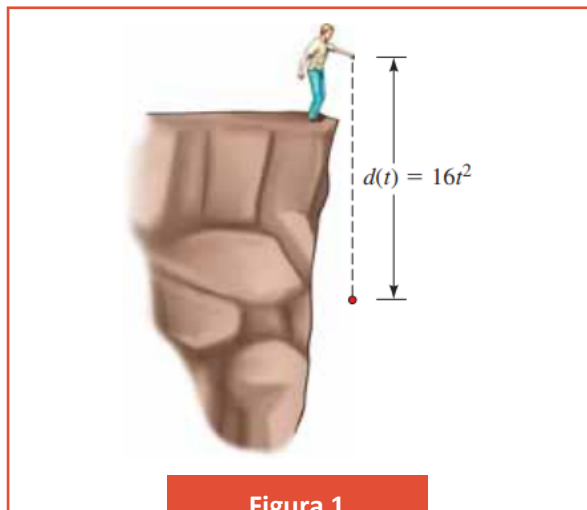


Figura 1

En t segundos la piedra cae $16 t^2$ pies

La regla anterior se denomina función.

¿Qué es una función?

Una función es una regla. Para designar a una función, por convención se utilizan usualmente las letras f , g , h , aunque se

puede emplear otra. Por ejemplo, podemos usar la letra f para definir una regla de la siguiente manera

“ f ” es la regla “calcular el cuadrado de un número”

Y, por lo tanto, cuando escribimos $f(5)$ queremos decir “aplicar la regla f al número 5”, lo cual resulta en $f(5) = 5^2 = 25$ (Stewart et al., 2012).

Definición de una función

Una función f es una regla que asigna **a cada elemento x** de un conjunto **A exactamente un elemento**, llamado **$f(x)$** , de un conjunto **B** (Stewart et al., 2012).

En esta definición la expresión $f(x)$ se lee “ f de x ”, además, para nuestro trabajo, A y B son conjuntos de números reales. **El conjunto A se denomina dominio de la función**. El **rango de f es el conjunto de todos los valores posibles de $f(x)$** cuando x varía en todo su dominio. El símbolo que representa un número arbitrario del dominio de una función f se llama variable independiente. El símbolo que representa un número en el rango de f se llama variable dependiente. Por tanto, si escribimos $y = f(x)$, entonces x es la variable independiente y y es la variable dependiente (Stewart et al., 2012).

Una función se puede representar de diversas formas, una de ellas es entenderla como una máquina, en la cual entran valores del dominio (**variable independiente**), y devuelve valores que pertenecen al rango (**variable dependiente**).

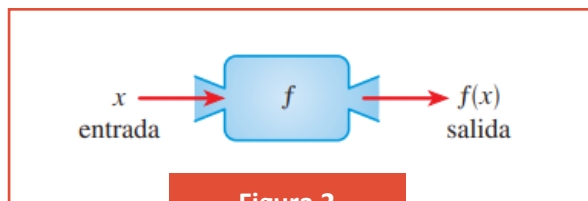


Figura 2

Función como una máquina

Otra forma de representar una función es por medio de un diagrama sagital (flechas) como en la figura 3. Cada flecha conecta un elemento de A con un elemento de B . La flecha indica que $f(x)$ está asociada con x , $f(a)$ está asociada con a , y así sucesivamente.

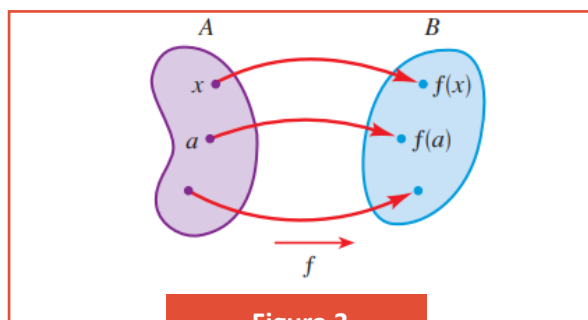


Figura 3

Función como diagrama sagital

En el resto de este documento nos centraremos en explicar cómo se estudia el dominio de una función de variable real, esto es, responder a la pregunta ¿qué valores pueden ingresar a la función?

Dominio de una función

El dominio de una función es el conjunto máximo de números reales \mathbb{R} para los cuales las operaciones que intervienen en ella están definidas.

De lo anterior, se desprende la necesidad de saber cuáles son algunas de las restricciones

que tienen las operaciones en los números reales.

Complementando la información de la tabla, agreguemos que existen operaciones que **no tienen restricciones, estas son la suma, resta y multiplicación.**

Veamos cómo estas restricciones nos permiten determinar el dominio de una función

Restricción en \mathbb{R}	Existe en \mathbb{R}	No existe en \mathbb{R}
No se pueden dividir por cero	$\frac{0}{2} = 0$	$\frac{2}{0}$
No se puede extraer raíz de índice par a un número negativo	$\sqrt{16} = 4$ $\sqrt[4]{81} = 3$	$\sqrt{-16}$ $\sqrt[4]{-81}$
En la expresión $\log_b a = c$ La base b del logaritmo debe ser mayor que cero y distinta de 1. El argumento a del logaritmo debe ser mayor que cero. El valor del logaritmo c es cualquier número real	$\log_2 5$ $\log 1$ $\log_{\frac{1}{2}} 8$	$\log_0 6$ $\log_1 5$ $\log_4 0$ $\log_3 -2$

Tabla1: Restricciones en \mathbb{R}

LEE Y ANALIZA LOS SIGUIENTES PROBLEMAS

A continuación, se presentan ejercicios resueltos con sus procedimientos, en estos problemas se sugiere hacer lo siguiente:

- Lee comprensivamente.
- Revisa el paso a paso.
- Destaca lo que te resulte importante.
- Destaca lo que te genere dudas y luego consulta al tutor.

1. **Determine el dominio de la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$ (Stewart et al., 2012).**

Como estrategia, planteamos **primero determinar cuáles son las operaciones que intervienen en la expresión algebraica de f** , estas son: división, radicación (raíz cuadrada) y suma. Como se dijo anteriormente la suma no tiene problemas, por lo tanto, si existen restricciones, estas vienen de las otras operaciones. En efecto, no se puede dividir por cero, y para que la raíz exista, el radicando no puede ser negativo. Mezclando ambas restricciones, puesto que la raíz está en el denominador, resulta que $x + 1$ debe ser estrictamente positivo, esto es

$$x + 1 > 0$$

Con lo cual $x > -1$.

El dominio de la función es $Dom f = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$, que se lee “el dominio de f es el conjunto de todos los x en \mathbb{R} tales que x es mayor que -1 ”.

El dominio anterior también se puede describir como un intervalo, este es $] - 1, \infty[$.

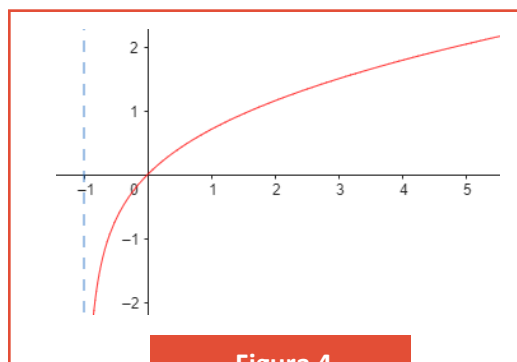


Figura 4

Gráfica de $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$

2. Determine el dominio de la función $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ (Stewart et al., 2012).

Las operaciones que definen a esta función son: radicación, resta y multiplicación (potencia). Tanto la resta como la multiplicación **no** tienen restricción, y solo debemos asegurarnos de que el radicando sea siempre **positivo o cero**, escrito como inecuación esto es $4 - x^2 \geq 0$. Notemos que si $x = 3$, entonces $4 - x^2 = 4 - 9 = -5$, y $\sqrt{-5}$ **no existe**, con lo cual 3 no es parte del dominio.

Determinemos el dominio de g resolviendo la inecuación anteriormente descrita

$$4 - x^2 \geq 0$$

$$(2 - x)(2 + x) \geq 0$$

Esta se debe estudiar con una tabla de signos, y para ello consideramos los valores de x que anulan cada factor, o sea $x = 2$ y $x = -2$, los que separan al eje real en tres tramos



Paso siguiente, veamos el signo de cada factor según el intervalo del eje real en que se encuentra la variable independiente

	$] -\infty, -2[$	$] -2, 2[$	$] 2, \infty[$
$(2 - x)$	+	+	-
$(2 + x)$	-	+	+
$(2 - x)(2 + x)$	-	+	-

Como se aprecia en la tabla (última fila), el producto entre los binomios es positivo solo en el intervalo $[-2, 2]$ siendo este el dominio de g . Nota que hemos incluido los extremos del intervalo porque en ellos $4 - x^2 = 0$ y la raíz de cero es calculable, y es precisamente cero.

Escrito en notación de conjuntos, el dominio es $Dom\ g = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$.

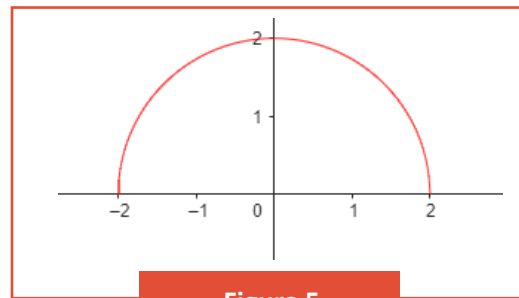


Figura 5

Gráfica de $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

3. Dominio de una función logarítmica.

Determine el dominio de la función $h(x) = \log_5(3x - 1)$ (Stewart et al., 2012).

Para esto solo basta recordar que el argumento de un logaritmo cualquiera siempre debe ser mayor estricto que cero, es decir

$$3x - 1 > 0$$

Resolvamos

$$3x - 1 > 0$$

$$3x > 1$$

$$x > \frac{1}{3}$$

Entonces $Dom h = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{3}\}$, o en su notación de intervalo $]\frac{1}{3}, \infty[$.

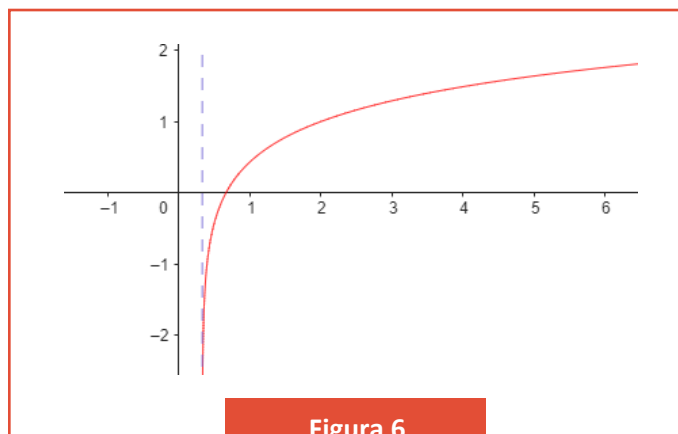


Figura 6

Gráfica de $\log_5(3x - 1)$

4. Determine el dominio de la siguiente función

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x^2 + x - 1}$$

Las operaciones con las que se define f son: radicación, suma, resta, multiplicación y división, es por esto que debemos restringir tanto el radicando como el denominador, evitando que este último se haga cero. Para el radicando, x debe ser positivo o cero, en símbolos $x \geq 0$. Ahora busquemos cuando el polinomio de grado dos se anula, planteando la ecuación cuadrática

$$2x^2 + x - 1 = 0$$

Resolvamos por factorización

$$(x + 1)(2x - 1) = 0$$

Las soluciones son $x = -1$ y $x = \frac{1}{2}$. Estos son los valores que debemos evitar para no dividir por cero.

Por último, debemos combinar tanto la restricción de la raíz como la del denominador, es decir $x \geq 0$, y a la vez $x \neq -1$ y $x \neq \frac{1}{2}$. El intervalo real que satisface todas estas condiciones a la vez es $\left[0, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, \infty\right[$

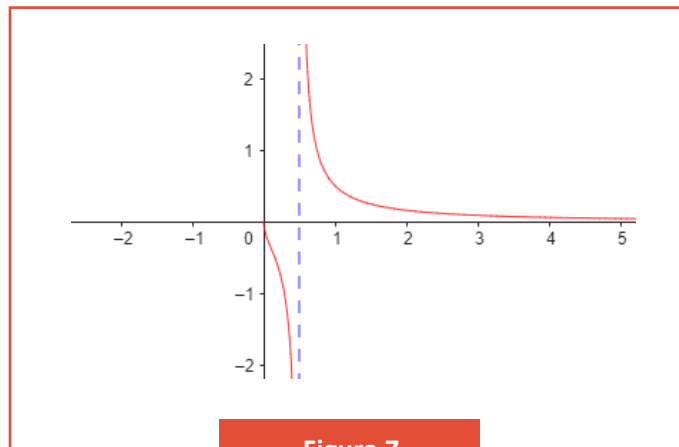


Figura 7

Gráfica de $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x^2+x-1}$

PON A PRUEBA TUS CONOCIMIENTOS

Problemas propuestos

A continuación, se solicita resolver cuatro derivadas para que practiques. Recuerda hacer lo siguiente:

- Resuélvelas siguiendo los pasos utilizados en los ejemplos resueltos.
- Si es necesario, apóyate con los apuntes expuestos al inicio.
- Si surgen dudas, regístralas para luego consultar con el tutor.
- ¡Buen trabajo!

Determina el dominio de las siguientes funciones (Stewart et al., 2012).

1. $f(x) = \sqrt{2x - 5}$
2. $g(x) = \frac{\sqrt{2+x}}{3-x}$
3. $h(x) = \frac{3}{\sqrt{x-4}}$
4. $r(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-2x-3}}$

Solucionario

$Dom f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{5}{2}\}$ o como intervalo $[\frac{5}{2}, \infty[$.

Como intervalo $[-2, 3[\cup]3, \infty[$.

Como intervalo $]4, \infty[$.

Como intervalo $] -\infty, -1[\cup]3, \infty[$.

SÍNTESIS

Una **función f** es una regla que asigna a cada **elemento x de un conjunto A exactamente un elemento, llamado $f(x)$, de un conjunto B** . El conjunto A se denomina dominio, y el conjunto B rango de la función. (Stewart et al., 2012).

El **dominio de una función** es el **conjunto máximo de números reales \mathbb{R}** para los cuales las **operaciones que intervienen en ella están definidas**. Importante es saber que hay operaciones que **no tienen restricciones, como**

la suma, resta y multiplicación. Además, para estudiar dominios, es necesario considerar las siguientes restricciones:

- No se puede dividir por cero.
- No existe la raíz de índice par de un número negativo.
- En un logaritmo $\log_b a = c$, la base b debe ser tal que $b > 0$ y $b \neq 1$. El argumento a , debe cumplir que $a > 0$ y c es un real cualquiera.

REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

- Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2012). Precálculo. *Matemáticas para el cálculo*. Cengage Learning Editores, SA.

¿Quieres recibir orientación para optimizar tu estudio en la universidad?

CONTAMOS CON PROFESIONALES EXPERTOS EN EL APRENDIZAJE QUE TE PUEDEN ORIENTAR

SOLICITA NUESTRO APOYO



Sitio Web de CIMA



Ver más fichas



Solicita más información